離散型と連続型の混合分布

私が家を出て最初に差し掛かる信号は，私の進行方向から見て，青信号が 1 分，黄 + 赤信号が 1 分で交替に点灯している。私が家をランダムに出た場合の信号での待ち時間を X とする。信号に差し掛かったとき青であれば，$X = 0$ で通過する。黄または赤であれば，0 ∼ 1 分の一様分布で待つ。X の分布関数は

$$F(x) = \Pr\{X \le x\} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5 + 0.5x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

で与えられる（図 1）。$F(x)$ は $x = 0$ において不連続であることに注意せよ。この分布は，離散分布のみ，あるいは連続分布のみで表わすことはできない。

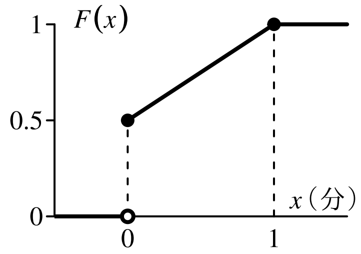

図 1: 待ち時間 X の分布関数

演習問題 1. 確率変数 X をシミュレートするための R の関数を考えよ。

演習問題 2. この分布の期待値（平均）μ，分散 σ^2 を求めよ。

演習問題 3. （以下，余裕があれば）歪度，尖度を求めよ。

演習問題 4. 原点まわりの k 次のモーメント $\mathrm{E}[X^k]$, 平均 μ まわりの k 次のモーメント $\mathrm{E}[(X-\mu)^k]$ を数式で表わせ。

演習問題 5. 特性関数を求めよ。複素数が苦手であれば，$\mathrm{E}[\cos(tX)]$ と $\mathrm{E}[\sin(tX)]$ を個別に求めてもよい。

ヒント $F(x)$ は，離散型分布関数 $F_d(x)$ と連続型分布関数 $F_c(x)$ を用いて

$$F(x) = \lambda_d F_d(x) + \lambda_c F_c(x) \quad （\lambda_d，\lambda_c \text{ は } \lambda_d + \lambda_c = 1 \text{ を満たす定数}）$$

と表わされる（参考: 国友直人「応用をめざす数理統計学」（朝倉書店, 2015））

答 1. 例えば 10 個の乱数を発生させる。

```
> ## F^{-1}(u) ##
> n <- 10
> ifelse((u <- runif(n)) <= 0.5, 0.0, 2.0*(u - 0.5))
 [1] 0.856346706 0.000000000 0.101217346 0.643915402 0.006420245
 [6] 0.000000000 0.063134923 0.000000000 0.000000000 0.562636775
```