簡単な数学

農業環境技術研究所

計測情報科

調査計画研究室

三輪　哲久

都道府県農林水産関係研究員

短期集合研修テキスト（理論系）

１９９２年１２月

簡単な数学

講義はおこなわないが，統計学を勉強するときに良く使われる簡単な記号をまとめておく。ただし，数学的に厳密な議論は省略してあるので，興味のある読者は，高校参考書の「基礎解析」，「確率・統計」などを参照されたい。

0．1　和の記号

n 個の数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の和を，ギリシャ文字“ $\sum$ ”（シグマと読む）を用いて，

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{0.1.01}$$

と表わす。(0.1.01)式の左辺は，x_j の j の値を1から n まで変化させて和をとることを意味する。j の値の範囲が明らかな場合は，$\sum_j x_j$ あるいは $\sum x_j$ のように簡略化して表わすこともある。j は添え字としてだけでなく，実際に j という値を持つ数として現れる場合もある（例２参照）。

例１． n 個の数値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の合計 T，平均 $\overline{x}$ は，次のように表わされる。

$$\text{合計}：T = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{0.1.02}$$

$$\text{平均}：\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{T}{n} \tag{0.1.03}$$

例２． $x_j = j^2$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ と置くと，１から n までの整数の２乗和は，

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

と表わされる（証明は省略）。［例２．終］

c, d を j によらない定数，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ を別の n 個の数とすると，次の性質が成り立つ。これらの性質は非常に重要である。

$$（１）\ \sum_{j=1}^{n}(c\,x_j) = c\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \tag{0.1.04}$$

$$（２）\ \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) \tag{0.1.05}$$

$$（３）\ \sum_{j=1}^{n} c = n \cdot c \tag{0.1.06}$$

$$（４）\ \sum_{j=1}^{n}(c\,x_j + d\,y_j) = c\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + d\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) \tag{0.1.07}$$

問１． 上の性質(１)，(２)，(３)を確認せよ。以下の問は，実際に紙と鉛筆（ボールペンでもよい）を使って必ず確認すること。

問 2．（１）と（２）を使って，（４）を導け。逆に（１）と（２）は，（４）の特別な場合であることを確かめよ。

例 3．各 x_j と平均 $\overline{x}$ との差 $x_j - \overline{x}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ を偏差という。n 個の偏差の合計はゼロである。

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x}) = 0 \qquad (0.1.08)$$

問 3．(0.1.08)式を確かめよ。以下，本節の問は上の性質（１）−（４）を使う。

例 4．偏差の２乗和を偏差平方和，あるいは単に平方和という。偏差平方和に関して次の等式が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 = \sum_{j=1}^{n}x_j^2 - n\overline{x}^2 = \sum_{j=1}^{n}x_j^2 - \frac{T^2}{n} \qquad (0.1.09)$$

問 4．(0.1.09)式を確認せよ。

注．偏差平方和は，n 個の偏差の２乗和であるが，これら n 個の偏差のあいだには，(0.1.08)式のように，合計するとゼロになるという制約条件が付いている。すなわち，n 個の偏差のうち，**自由に**値をとり得るのは $n-1$ 個である。この $n-1$ のことを，平方和の自由度（*degrees of freedom*；直訳すると「自由の程度」）という。

注．電卓を使って計算する場合は，右辺の $\sum_{j=1}^{n}x_j^2 - T^2/n$ が便利である。パソコン等でプログラムを書く場合は，左辺の $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$ を使ったほうが一般に精度が高い。

例 5．c, d を定数として，$y_j = c x_j + d$ $(j=1,2,\cdots,n)$ とおく。この y_j に関して，

$$\overline{y} = c\,\overline{x} + d \qquad (0.1.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(y_j - \overline{y})^2 = c^2\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 \qquad (0.1.11)$$

が成り立つ。

問 5．(0.1.10)，(0.1.11)式を確かめよ。

例 6．２組の数値 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ と $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を考える。ただし，p_j については，

$$p_j \geqq 0\ ,\ \sum_{j=1}^{n}p_j = 1$$

の条件を満たすものとする。ここで，次の２つの数値をを定義する。

j	$1, 2, \cdots, n$
p_j	$p_1, p_2, \cdots, p_n$
x_j	$x_1, x_2, \cdots, x_n$
y_j	$y_1, y_2, \cdots, y_n$

$$\mu \ = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot p_j \quad (\mu \text{はミューと読む}) \tag{0.1.12}$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 \cdot p_j \quad (\sigma \text{はシグマと読む}) \tag{0.1.13}$$

このとき，次の等式が成立する。

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu) \cdot p_j = 0 \tag{0.1.14}$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j{}^2 \cdot p_j - \mu^2 \tag{0.1.15}$$

問6．(0.1.14)，(0.1.15)式を確かめよ。

例7．（例6の続き）c, d を定数として，$y_j = c x_j + d$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ とおく。この y_j に対して，(0.1.12)，(0.1.13)式と同様に

$$\mu_y \ = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot p_j \tag{0.1.16}$$

$$\sigma_y{}^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \mu_y)^2 \cdot p_j \tag{0.1.17}$$

を定義する。ここで，添え字の“y”は，y_j に関する μ，σ^2 の意味である。このとき，次の関係が成り立つ。

$$\mu_y \ = c\mu + d \tag{0.1.18}$$

$$\sigma_y{}^2 = c^2 \sigma^2 \tag{0.1.19}$$

問7．(0.1.18)，(0.1.19)式を確かめよ。

注．ここまでの議論では，$\sum_{j=1}^{n} x_j$ のように j は1から n まで変化することになっていた。しかし，

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_j = y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}$$

のように，j の変化する範囲はいろいろな場合が考えられる。このような場合でも，上に述べた性質はすべて成立する。さらに，

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = p_0 + p_1 + \cdots + p_n + \cdots$$

のような，無限個の数の和（無限級数）を考える場合もある。このときは無限級数の集束に関する議論が必要になってくる。しかし初歩の統計学に登場する無限級数は，ほとんどの場合に集束し，上に述べた性質(1)−(4)が成立する。

例 8．右のように m 行× n 列に並んだ $m \cdot n$ 個の数値 x_{ij} を考える。第 i 行の合計と平均を

$$T_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$
$$= x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} \tag{0.1.20}$$

$$\overline{x}_{i\cdot} = T_{i\cdot}/n \tag{0.1.21}$$

とする。ここで，添え字の“．”は，その部分の添え字に関して，合計および平均をとることを意味している。

	1	2	…	j	…	n	合計	平均
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$T_{1\cdot}$	$\overline{x}_{1\cdot}$
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	$T_{2\cdot}$	$\overline{x}_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	$T_{i\cdot}$	$\overline{x}_{i\cdot}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mj}	…	x_{mn}	$T_{m\cdot}$	$\overline{x}_{m\cdot}$
合計	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	…	$T_{\cdot j}$	…	$T_{\cdot n}$	$T_{\cdot\cdot}$	$\overline{x}_{\cdot\cdot}$
平均	$\overline{x}_{\cdot 1}$	$\overline{x}_{\cdot 2}$	…	$\overline{x}_{\cdot j}$	…	$\overline{x}_{\cdot n}$		

同様に第 j 列の合計と平均を

$$T_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} \tag{0.1.22}$$

$$\overline{x}_{\cdot j} = T_{\cdot j}/m \tag{0.1.23}$$

とする。さらに総合計を $T_{\cdot\cdot}$ とすると，

$$T_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{m} T_{i\cdot} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} T_{\cdot j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \tag{0.1.24}$$

が成り立つ。この式は，i と j のどちらの添え字に関して先に和をとっても結果が同じになることを示している。$\sum$ 記号のあいだの括弧は省略される場合が多い。

総平均を

$$\overline{x}_{\cdot\cdot} = T_{\cdot\cdot}/(m \cdot n) \tag{0.1.25}$$

とすると，全体の平方和は，

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_{i\cdot})^2 + n\sum_{i=1}^{m}(\overline{x}_{i\cdot} - \overline{x}_{\cdot\cdot})^2 \tag{0.1.26}$$

と表わされる。

問 8．(0.1.26)式を証明せよ。

0．2　積分

関数 $f(x)$ の a から b までの定積分は，右の図1のように $f(x)\geqq 0$ $(a\leqq x\leqq b)$ の場合には，斜線部分の面積 K の値に等しくなる。

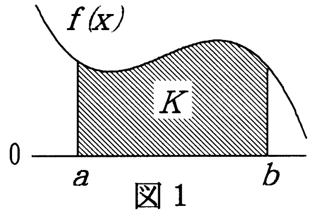

図1

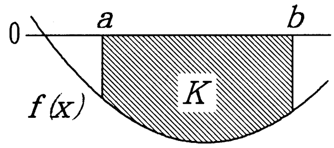

図2

$$\int_a^b f(x)\,dx = K \qquad (0.2.01)$$

$f(x)\leqq 0$ $(a\leqq x\leqq b)$ の場合（図2）は，面積 K の値にマイナスの符号を付けたものになる。

$$\int_a^b f(x)\,dx = -K \qquad (0.2.02)$$

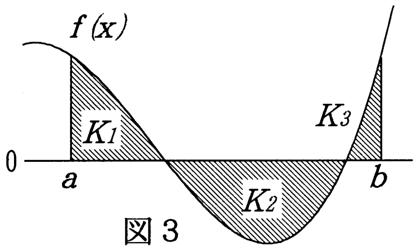

図3

図3のように $f(x)$ がプラスやマイナスの符号をもつ場合は，プラスの符号をもつ部分の面積からマイナスの符号をもつ部分の面積を引いたものになる。

$$\int_a^b f(x)\,dx = K_1-K_2+K_3 \qquad (0.2.03)$$

注．定積分は $f(x)$ の不定積分（微分すると $f(x)$ に等しくなる関数）を用いて定義される場合もある。すなわち，$F(x)$ を

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となる関数とすると，関数 $f(x)$ の a から b までの定積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a) \qquad (0.2.04)$$

と定義される。ここで $F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ と表わす。［注．終］

c,d を x によらない定数，$g(x)$ を別の関数とすると，次の性質が成り立つ。

（1）$\displaystyle\int_a^b \{c\,f(x)\}\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$　(0.2.05)

（2）$\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$　(0.2.06)

（3）$\displaystyle\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$　(0.2.07)

（4）$\displaystyle\int_a^b \{c\,f(x)+d\,g(x)\}\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$　(0.2.08)

通常は不定積分を使った定積分の定義(0.2.04)式から(１)－(３)を証明するが，ここでは証明は省略する。しかし，面積を使った定義から直感的に感じとることはできるであろう。また，０．１節の和の性質と同様に，(４)は(１)と(２)から導かれる。逆に，(１)と(２)は(４)の特別な場合である

これらの性質は，０．１節の和の性質(0.1.04)－(0.1.07)式と同じ形をしている。そして，以下に述べる定積分に関する公式は，０．１節と同様にして性質(１)－(４)を使って導くことができる。

例１．２つの性質

$$f(x)\geqq 0 \quad (a\leqq x\leqq b) \tag{0.2.09}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \tag{0.2.10}$$

をみたす関数 $f(x)$ を考える。ここで，次の２つの数値

$$\mu = \int_a^b x f(x)\,dx \tag{0.2.11}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\,dx \tag{0.2.12}$$

を定義する。このとき，次の等式が成立する。

$$\int_a^b (x-\mu)\, f(x)\,dx = 0 \tag{0.2.13}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \mu^2 \tag{0.2.14}$$

問９．(0.2.13)，(0.2.14)式を確かめよ。

例２．（例１の続き） c, d を定数として，$y=g(x)=cx+d$ とおく。この y に対して，(0.2.13)，(0.2.14)式と同様に

$$\mu_y = \int_a^b y f(x)\,dx = \int_a^b g(x) f(x)\,dx \tag{0.2.15}$$

$$\sigma_y{}^2 = \int_a^b (y-\mu_y)^2 f(x)\,dx = \int_a^b (g(x)-\mu_y)^2 f(x)\,dx \tag{0.2.16}$$

を定義する。このとき，次の関係が成り立つ。

$$\mu_y = c\mu + d \tag{0.2.17}$$

$$\sigma_y{}^2 = c^2\sigma^2 \tag{0.2.18}$$

問10．(0.2.17)，(0.2.18)式を確かめよ。

定積分の値は上端の位置 b に依存する。そこで，新たに上端を x と書けば，a から x までの定積分は x の関数となる。これを

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (0.2.19)$$

と書くことにする。この $F(x)$ を x に関して微分すると $f(x)$ になる。すなわち，

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \qquad (0.2.20)$$

が成り立つ。証明は省略するが概略は以下のとおりである。
微分の定義によると

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

である。ここで，右辺の分子 $F(x+h)-F(x)$ は右図の斜線で示した柱の部分の面積に等しい。その面積を幅 h で割ったものは，だいたい柱の高さ $f(x)$ に等しい。そして，極限をとると $f(x)$ に一致する。

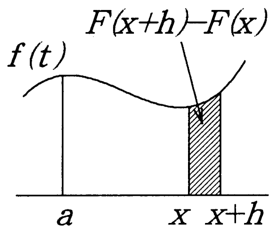

図４

注．ここまでの議論では，$\int_a^b f(x)\,dx$ のように有限の区間 $a \leqq x \leqq b$ での定積分を考えてきた。しかし，$\int_0^\infty f(x)\,dx$ や $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ のような，無限区間での定積分を考えることもある。ここで，無限区間での定積分は

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\ \infty}}\int_a^b f(x)\,dx$$

と定義される。このときは極限の集束に関する議論が必要になってくる。しかし和の記号の場合と同様に初歩の統計学に登場する無限区間の定積分は，ほとんどの場合に集束し，上に述べた性質(１)−(４)が成立する。

０．３　微分と最小値・最大値

関数 $f(x)$ の点 x における微分係数は，

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (0.3.01)$$

と定義され，これは，点 x における接線の傾きを表わす。微分係数は $f'(x)$ や $\dot{f}(x)$ などと表わされることもある。

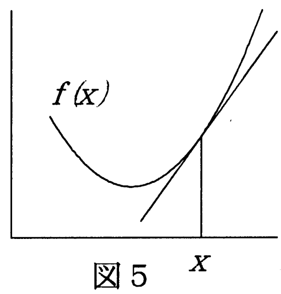

図５

微分係数の値は点 x によって異なる。すなわち，微分係数もまた x の関数となる。これを，元の関数 $f(x)$ の導関数とよぶ。関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを「関数 $f(x)$ を微分する」という。

c, d を x によらない定数，$g(x)$ を別の関数とすると，次の性質が成り立つ（証明は省略する）。

$$(1)\ \frac{d}{dx}\left(c\,f(x)\right) = c\frac{d}{dx}f(x) \qquad (0.3.02)$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \qquad (0.3.03)$$

$$(3)\ \frac{d}{dx}c = 0 \qquad (0.3.04)$$

$$(4)\ \frac{d}{dx}\left(c\,f(x)+d\,g(x)\right) = c\frac{d}{dx}f(x) + d\frac{d}{dx}g(x) \qquad (0.3.05)$$

関数 $f(x)$ について，区間 $a \leqq x \leqq b$ での最小値を求めるには，次のようにする。

ア）まず，導関数の値がゼロになる点を探す。その点で関数 $f(x)$ は極小（または極大）となるが，必ずしも最小値を与えるとは限らない。

イ）極小値と端の値の中から最小値を求める。

最大値についても同様である。

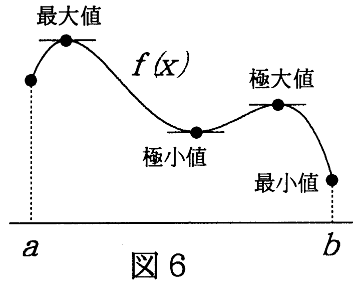

図6

0．4　偏微分

2変数 x, y の関数 $f(x,y)$ に対して，変数 y を $y=b$ に固定すると，$f(x,b)$ は x のみの関数と考えることができる。これを x に関して微分したものを，

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,b)-f(x,b)}{h} \qquad (0.4.01)$$

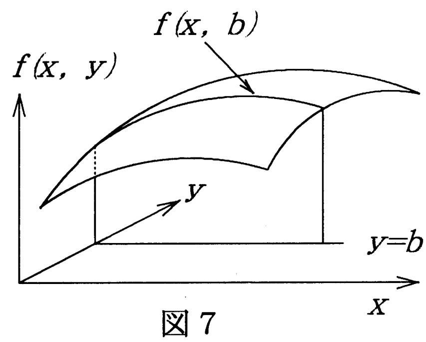

図7

と表わし，x についての偏微分係数をよぶ。この値は，点 x に依存するとともに，変数 y の固定点 b の値にも依存する。すなわち，偏微分係数は x と b の関数となる。これを偏導関数という。通常は，b の代わりに元の y を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \qquad (0.4.02)$$

偏微分の場合には，(0.4.01)，(0.4.02)式のように，“d ”の代わりに“∂ ”が用いられる。 また，x の値を固定して y に関して偏微分する場合も同様に定義される。

例 1． $f(x, y) = x^2+2xy+2y^2$ とすると， y を定数と考えて，

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x+2y$$

が得られる。 y についての偏微分も同様に

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2x+4y$$

となる。［例１．終］

２変数の関数 $f(x, y)$ の最大値・最小値を x， y の領域 $(x, y) \in D$ で求める方法は１変数の場合と同様である。 $f(x, y)$ の極値を与える点では，偏導関数の値はゼロになる（図７参照）。そこで，まず x， y についての偏導関数がゼロになる点を求める。

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)=0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)=0 \qquad (0.4.03)$$

つぎに，領域 D の境界を含めて最大値または最小値を探す。

問11． n 組の数値 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) が与えられているとする。ここで，α と β を未知変数とする関数

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \qquad (0.4.04)$$

を考える（注．問11では，x_i，y_i は与えられた定数で，α と β が変数になっている）。この $f(\alpha, \beta)$ に関して，α と β についての偏微分係数が，それぞれゼロになるときの α と β を求めよ。

０．５　指数関数と対数関数

正の実数 $a>0$ に対して，関数

$$f(x) = a^x \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad (0.5.01)$$

を a を底とする指数関数という。 x は任意の実数の値を取りうるが，関数 $f(x)$ の値は常に正である。

$$f(x) = a^x > 0 \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

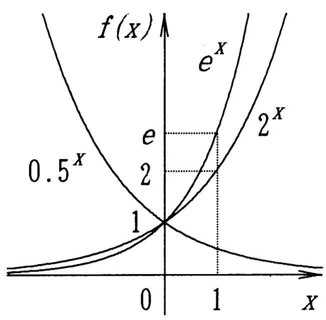

図８

指数関数は次の性質をもつ。

（１） $f(0) = a^0 = 1$ 　　(0.5.02)

（２） $a > 1$ のとき，

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad (0.5.03)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a^x = \infty \qquad (0.5.04)$$

（３）０ $< a <$ １のとき，

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \qquad (0.5.05)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \qquad (0.5.06)$$

（４）任意の実数 x，y に対して，

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad a^{x+y} = a^x a^y \qquad (0.5.07)$$

a として，とくに自然対数の底 $e=2.71828\cdots$ を用いた

$$f(x) = e^x = \exp(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \qquad (0.5.08)$$

を単に指数関数とよぶこともある。 e^x は， $\exp(x)$ と表わされることも多い。

例１．標準正規分布の密度関数。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \qquad (0.5.09)$$

指数関数の逆関数を対数関数という。すなわち，正の定数 a $(a>0,\ a\neq1)$ を定めたとき，正の実数 x に対して $a^y = x$ となる y を

$$y = f(x) = \log_a x \qquad (0.5.10)$$

と表わし，a を底とする対数関数とよぶ。

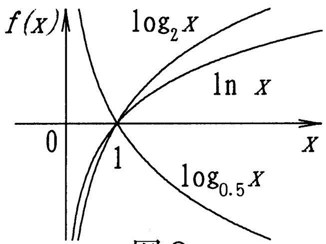

図９

対数関数は $x>0$ に対して定義されるが，関数 $f(x)$ の値は任意の実数値をとりうる。

対数関数に関しては，次の性質が成り立つ。

（５）$f(1) = \log_a 1 = 0$ (0.5.10)

（６）$a > 1$ のとき $f(x) = \log_a x$ は単調増加，

　　０ $< a <$ １のとき $f(x) = \log_a x$ は単調減少

（７）任意の正の実数 $x>0$，$y>0$ に対して，

$$f(xy) = f(x)+f(y), \qquad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad (0.5.11)$$

底として $a=10$ を用いたものを常用対数とよぶ。常用対数 $\log_{10}x$ を単に $\log x$ と表わすこともある。自然対数の底 $e=2.71828\cdots$ を底とするものを自然対数とよぶ。自然対数は，$\log_e x = \ln x$ と表わされることも多い。

0．6　順列と組合せ

n 個の異なるものから r 個を選んで並べたものを順列という。順列の総数 ${}_nP_r$ は次の式で与えられる。

$$ {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}} \qquad (0.6.01)$$

注. 証明の概略は以下のとおりである。n 個の異なるものを $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とする。そのうちの r 個を並べる場所を考える。

$$\begin{array}{cccc} {}^1\square & {}^2\square & \cdots & {}^r\square \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ n \text{ 通り} & n-1 \text{ 通り} & & n-r+1 \text{ 通り} \end{array}$$

第1番めに置くものとしては n 通りの可能性がある。第1番めが決まると第2番めとしては $n-1$ 通りの可能性が残されている。以下同様にして，r 番めについては，$r-1$ 個のものがすでに配置されているので $n-(r-1)$ 通りの可能性が残されている。

とくに，$r=n$ の場合は

$$ {}_nP_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad (0.6.02)$$

となる。$n!$ は，1から n まで n 個の整数を乗じたもので，n の階乗という。

例1. a，b，cという3つの文字（$n=3$）のすべての順列は，

abc，　acb，　bac，　bca，　cab，　cba

であり，順列の数は $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$ 通りとなる。

問12. 次の等式を証明せよ。ただし，$r=0$ の場合は $0!=1$ と約束する。

$$ {}_nP_r = n!/(n-r)! \qquad (0.6.03)$$

n 個の異なるものから r 個を選んだものを組合せという。組合せの総数を ${}_nC_r$，あるいは $\binom{n}{r}$ と表わすと，

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (0.6.04)$$

となる。証明の概略は次のとおりである。まず順列の総数は ${}_nP_r$ である。その中のひとつの順列に注目する。そこに含まれる r 個のものからなる順列は $r!$ 通りある。これらは，同じ組合せと考えるので，組合せの総数は，${}_nC_r={}_nP_r/r!$ となる。

(0.6.04)式から明らかなように次の関係が成り立つ。

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \qquad (0.6.05)$$

0.7 ギリシャ文字

小文字	大文字	英語綴り	[英国式発音] / [アメリカ式発音]	通常の日本語発音
α	A	alpha	[ǽlfə]	アルファ
β	B	beta	[bí:tə] / [béitə, bí:tə]	ベータ
γ	Γ	gamma	[gǽmə]	ガンマ
δ	Δ	delta	[déltə]	デルタ
ε	E	epsilon	[épsilən] / [épsəlɔ̀n, épsələn]	イプシロン
ζ	Z	zeta	[zí:tə] / [zéitə, zí:tə]	ジータ
η	H	eta	[í:tə] / [éitə, í:tə]	イータ（エータ）
θ	Θ	theta	[θí:tə] / [θéitə, θí:tə]	シータ
ι	I	iota	[aióutə]	イオタ
κ	K	kappa	[kǽpə]	カッパ
λ	Λ	lambda	[lǽmdə]	ラムダ
μ	M	mu	[mju:] / [mju:, mu:]	ミュー
ν	N	nu	[nju:] / [nu:, nju:]	ニュー
ξ	Ξ	xi	[sai, gzai, zai] / [zai, sai]	グザイ（クシー）
o	O	omicron	[əmáikrən] / [ɔ́mikrɔ̀n, óumikrɔ̀n]	オミクロン
π	Π	pi	[pai]	パイ
ρ	P	rho	[rou]	ロー
σ	Σ	sigma	[sígmə]	シグマ
τ	T	tau	[tau, tɔ:]	タウ
υ	Υ	upsilon	[jú:psilɔ̀n, ʌpsáilən] / [ʌ́psəlɔ̀n, jú:psəlɔ̀n]	ユプシロン
ϕ	Φ	phi	[fai]	ファイ
χ	X	chi	[kai]	カイ
ψ	Ψ	psi	[psai] / [sai, psai]	プサイ
ω	Ω	omega	[óumigə] / [oumégə, oumí:gə, ouméigə]	オメガ

注. 英国式発音は POD (Pocket Oxford Dictionary) による。アメリカ式発音は The American Heritage Dictionary による。ただし，英国式と異なる場合のみ，アメリカ式の発音を載せた。辞書によっては，ここに載せたもの以外の発音を示すものもある。

注. 小文字を一列に並べると次のようになる。

$$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta\,\eta\,\theta\,\iota\,\kappa\,\lambda\,\mu\,\nu\,\xi\,o\,\pi\,\rho\,\sigma\,\tau\,\upsilon\,\phi\,\chi\,\psi\,\omega$$

ガンマ		カイ		
γ	r	χ	x	X
	アール		エックス （小，大）	

γ（ガンマ）や χ（カイ）は，基線から下にはみ出しており，r（アール）や x（エックス）とは完全に異なる文字である。

注. プログラムなどを作成するときに，“$\lambda = 1$” のつもりで

```
RAMUDA = 1.0
```

などと書かないように注意せよ。

問の答

0．1　和の記号

問1．（１）$\sum_{j=1}^{n}(cx_j) = cx_1+cx_2+\cdots+cx_n$

$$= c\,(x_1+x_2+\cdots+x_n) = c\sum_{j=1}^{n}x_j$$

（２）$\sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)$

$$= (x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n) = \left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\right)$$

（３）$\sum_{j=1}^{n}c = c+c+\cdots+c = n\cdot c$

問2．（４）$\sum_{j=1}^{n}(cx_j+dy_j) = \left(\sum_{j=1}^{n}cx_j\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}dy_j\right)$　　（性質 (2) より）

$$= c\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)+d\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\right)$$　　（性質 (1) より）

逆に(４)で，$d=0$ と置くと(１)が得られる。また，$c=d=1$ とすれば，(２)が得られる。

問3．　$\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n}x_j-\sum_{j=1}^{n}\overline{x} = T-n\overline{x} = 0$

ここで，第１の等式は性質(４)，第２の等式は性質(３)，第３の等式は平均の定義による。

問4．　$\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j^2-2\overline{x}\cdot x_j+\overline{x}^2) = \sum_{j=1}^{n}x_j^2-2\overline{x}\cdot\sum_{j=1}^{n}x_j+\sum_{j=1}^{n}\overline{x}^2$

$$= \sum_{j=1}^{n}x_j^2-2n\overline{x}\cdot\overline{x}+n\overline{x}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n}x_j^2 - n\overline{x}^2 = \sum_{j=1}^{n}x_j^2 - \frac{T^2}{n}$$

問5．　$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(cx_j+d)$

$$= \frac{c}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d = c\overline{x}+d$$

$$\sum_{j=1}^{n}(y_j-\overline{y})^2 = \sum_{j=1}^{n}[\,(cx_j+d)-(c\overline{x}+d)\,]^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n}[c\,(x_j-\overline{x})\,]^2 = c^2\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2$$

問6． $\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)\cdot p_j = \sum_{j=1}^{n}x_j\cdot p_j - \sum_{j=1}^{n}\mu p_j = \mu - \mu\sum_{j=1}^{n}p_j = 0$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2\cdot p_j = \sum_{j=1}^{n}(x_j{}^2-2\mu x_j+\mu^2)\cdot p_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n}x_j{}^2\cdot p_j - 2\mu\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot p_j + \mu^2\cdot\sum_{j=1}^{n}p_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n}x_j{}^2\cdot p_j - 2\mu\cdot\mu + \mu^2 = \sum_{j=1}^{n}x_j{}^2\cdot p_j - \mu^2$$

ここでは，性質(１)−(４)のほかに，$\sum_{j=1}^{n}p_j = 1$ の関係を使っている。

問7． $\mu_y = \sum_{j=1}^{n}y_j\cdot p_j = \sum_{j=1}^{n}(cx_j+d)\cdot p_j = c\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot p_j + d\sum_{j=1}^{n}p_j = c\mu+d$

$$\sigma_y{}^2 = \sum_{j=1}^{n}(y_j-\mu_y)^2\cdot p_j = \sum_{j=1}^{n}[(cx_j+d)-(c\mu+d)]^2\cdot p_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n}[c(x_j-\mu)]^2\cdot p_j = c^2\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2\cdot p_j = c^2\cdot\sigma^2$$

問8． $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{i.}+\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{i.})^2 + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})(x_{ij}-\overline{x}_{i.})$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{i.})^2 + n\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2$$

ここで，中央の式の第２項で，

$$\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})(x_{ij}-\overline{x}_{i.}) = (\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{i.}) = 0$$

の関係を使っている。

０．２　積分

問9． 略。問６と同様。

問10． 略。問７と同様。

0．4　偏微分

問11． $f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)^2$ をαについて偏微分すると，βを定数と考えて，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\alpha,\beta)=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i) \qquad ①$$

となる。同様にβについて偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial\beta}f(\alpha,\beta)=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\alpha-\beta x_i) \qquad ②$$

が得られる。それぞれをゼロとおくと，

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)=n\overline{y}-n\alpha-n\beta\overline{x}=0 \qquad ③$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\alpha-\beta x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0 \qquad ④$$

となる。まず，③式より，

$$\alpha=\overline{y}-\beta\overline{x} \qquad ⑤$$

が得られる。⑤式を④式に代入すると，

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}x_i=\beta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \qquad ⑥$$

となる。ここで，

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

の関係を使えば，

$$\beta=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\Big/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \qquad ⑦$$

が得られる。

0．6　順列と組合せ

問12．
$$\begin{aligned}{}_nP_r&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots2\cdot1}{(n-r)\cdots2\cdot1}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$